Téma 4: Částečný problém vlastních čísel (1)

úloha: $\boxed{A \in \mathbb{C}^{n\times n},\ |\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \dots \ge |\lambda_n| \ge 0}$

→ najdi aproximaci několika vl. čísel a vektorů (např. největší – odhad $\|A\|$, google page rank problem; nejmenší – regularita A; $\langle \lambda_{min}, \lambda_{max} \rangle$ – odhad $\kappa(A)$; aproximace A maticí menší hodnosti; …)

4.1 Mocninná metoda

– odhad jednoho vl. páru (dominantního) ≡ dvojice (λ_1, v_1)

- speciální případ:
  - nechť $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, tj. dominantní vl. č. je jednoznačně určeno
  - nechť A má úplný systém vl. vektorů, tj. je diagonalizovatelná

$$\boxed{A = SDS^{-1},\ S = [s_1, \dots, s_n],\ D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}}$$

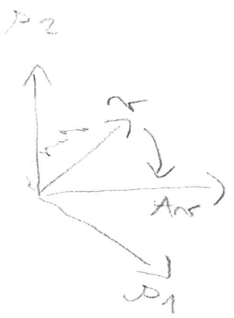
odvození: $v \in \mathbb{C}^n, v \neq 0$ … lib. startovní vektor

→ co se stane, budu-li násobit $A \times v$?

koeficienty v v bázi vl. vektorů A

$$\exists\, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}: \quad v = c_1 s_1 + c_2 s_2 + \dots + c_n s_n \quad / A \cdot$$

$$Av = c_1 A s_1 + c_2 A s_2 + \dots + c_n A s_n =$$
$$= c_1 \lambda_1 s_1 + c_2 \lambda_2 s_2 + \dots + c_n \lambda_n s_n$$



$|\lambda_1|$ je největší ⇒ otáčím v do směru s_1

$\Rightarrow$ sestrojím sekvenci $v, Av, A(Av), \ldots$ (

$$A^k v = c_1 \lambda_1^k s_1 + c_2 \lambda_2^k s_2 + \ldots + c_n \lambda_n^k s_n \quad / : \lambda_1^k$$

$$\frac{1}{\lambda_1^k} \cdot A^k v = c_1 s_1 + \underbrace{\left[c_2 \underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}_{<1}^k s_2 + \ldots + c_n \underbrace{\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)}_{<1}^k s_n \right]}_{k \to \infty \ \to 0}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda_1^k}\right) A^k v \xrightarrow{k \to \infty} c_1 s_1, \text{ pokud } c_1 \neq 0$$

jen škálování

$\Rightarrow$ chci vl. vektor normovaný $\Rightarrow$ počítám

$$\frac{1}{\|A^k v\|} A^k v \xrightarrow{k \to \infty} s, \text{ kde } \|s\| = 1 \text{ a } s \text{ je}$$

vlastní vektor k λ_1

apr. vl. čísla:

idea: $A s_1 = \lambda_1 s_1 \Rightarrow \lambda_1 = s_1^* A s_1 / s_1^* s_1$

$\Rightarrow$ je-li $\tilde{v} \approx s_1$, ~~pak~~ $\mu := \dfrac{\tilde{v}^* A \tilde{v}}{\tilde{v}^* \tilde{v}} \approx \lambda_1$

def: Číslo $\mu = \dfrac{\tilde{v}^* A \tilde{v}}{\tilde{v}^* \tilde{v}}$ nazveme Rayleighův podíl aproximující vl. číslo.

algoritmus: vstup: A, $v \neq 0$, m ← max. # iterací

výstup: v_m, μ_m – apr. vl. páru

$v_1 := v / \|v\|$

for $k = 1, \ldots, m$ do

  $w \overset{(*)}{:=} A v_{k-1}$

  $v_k := w / \|w\|$

  $\mu_k \overset{(o)}{:=} v_k^* A v_k$

end

násob. A počítáme jen 1x v iteraci

Věta: Nechť $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalizovatelná, $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ a $v \in \mathbb{C}^n$ takové, že $c_1 \neq 0$. Pak pro mocninou metodu platí, že

$v_k \xrightarrow{k \to \infty} s$, $\|s\| = 1$, $\operatorname{span}\{s_1\} = \operatorname{span}\{s\}$,

$\mu_k \xrightarrow{k \to \infty} \lambda_1$.

Konvergenci nazveme lineární s rychlostí $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$.

D: plyne z předchozí konstrukce □

vlastnosti: výp. náklady – 1x násobení s A v ∀ iteraci

– paměť – ukládáme jen v_k, μ_k aktuální

– rychlost konv. závisí na tom, jak dobře je λ_1 odděleno od ostatních vl. č. a jak blízko je v k s_1 (velikost c_1 oproti $c_2, \dots, c_n$)

Pozn: $v \not\perp s_1$ v praxi většinou splněno (v – vol. náhodný vektor) nebo se nagenerují díky zaokr. chybám v FPA

• obecný případ: $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_p| > |\lambda_{p+1}|$

$\overbrace{\lambda_1 = \dots = \lambda_p}^{\text{r-násobné dom. vl. č.}}$ .... met. konverguje k vl. vekt.

$\overbrace{\text{jinak}}^{\text{nejednoznačné dom. vl. č.}}$ ... met. může divergovat

př: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Av = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots$

Pozn: analog. výsledky platí i pro A nediagonalizovatelnou – mnohem těžší důkazy

• modifikace mocn. met: Inverzní mocn. met. (4)

chci λ_n, v_n: nejmenší vl. č. a vl. vektor

$$\begin{array}{ccc} A & & A^{-1} \\ \lambda_1, \dots, \lambda_n & \Longrightarrow & 1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n \\ v_1, \dots, v_n & & v_1, \dots, v_n \end{array}$$

$1/\lambda_n$ ← dom. vl. č. A^{-1}

⟹ aplikuji mocn. met. na A^{-1}, tj. řádek (*) nahradím řešením soustavy rovnic $Aw = v_k$

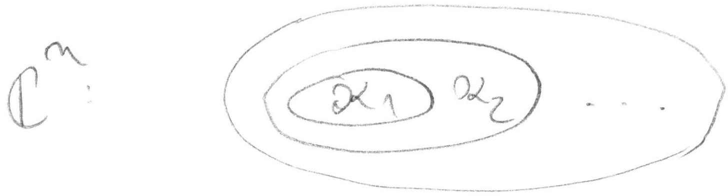
– řádek (Δ) není třeba měnit, $v_k \to v_n$!

4.2 Krylovovy prostory

úloha: chci aproximaci více vl. párů A

→ vezmu celý prostor $\mathrm{span}\{v, Av, \dots, A^{m-1}v\}$

def: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regul., $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$, $m \geq 1$.
Pak $\mathcal{K}_m(A,v) = \mathrm{span}\{v, Av, \dots, A^{m-1}v\}$ je m-tý Krylovův prostor matice A vzhledem k v.



$\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{C}^n$

$\dim(\mathcal{K}_m(A,v)) \leq m \leq n$

~~ozn: $p(A)$~~ př: v – vl. vekt. A ⟹ Av je lin. závislé s v ⟹ $\dim(\mathcal{K}_m(A,v)) = 1$

ozn: $d(A,v) := \min\{m : \dim(\mathcal{K}_m) = \dim(\mathcal{K}_{m+1})\}$

… stupeň vektoru v vzhledem k matici A

platí:
1) $d(A,v) \leq n$
2) $\dim(\mathcal{K}_m(A,v)) = m,\ m = 1,\dots,d(A,v)$
3) $\dim(\mathcal{K}_m(A,v)) = d(A,v),\ m \geq d(A,v)$

D: 1) ... triv.   2) z definice $d(A,v)$

3) $A^d v$ je lin. kombinací $v,\dots,A^{d-1}v \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \alpha_i,\ i=0,\dots,d-1:\ A^d v = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i A^i v \quad /\cdot A$$

DOSADÍM

$$\Rightarrow A^{d+1}v = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i A^{i+1} v = \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_{i-1} A^i v + \alpha_d A^d v =$$

$$= \sum_{i=0}^{d-1} \beta_i A^i v \Rightarrow A^{d+1} v \in \mathcal{K}_d(A,v)$$

$\square$

důsledek: $\mathcal{K}_1(A,v) \subset \dots \subset \mathcal{K}_d(A,v) = \mathcal{K}_{d+1}(A,v) = \dots$

$\Rightarrow \mathcal{K}_m(A,v),\ m \geq d(A,v)$ je A-invariantní

Výpočet báze $\mathcal{K}_m(A,v)$: Pp: $m \lneq d(A,v)$

→ Krylovova báze $v, Av, \dots, A^{m-1}v$ je numericky nevhodná (vektory konv. k vl. vektoru, tedy jsou num. skoro závislé)

→ chci ON bázi, nesmím mocnit A^k

- Arnoldiho proces:

≡ speciálně upravený Gram-Schmidt

⇒ ex. ve variantách dle CGS, MGS, lišících se stabilitou, paralelizací, ...

- počítá ON bázi $\mathcal{K}_m(A,v)$

odvození:

$$[v] \xrightarrow{\text{normuj}} [v_1] \xrightarrow[A]{\text{násob}} [v_1, Av_1] \xrightarrow{} [v_1, \tilde{v}_2] \xrightarrow{\text{normuj}} [v_1, v_2] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[A]{\text{násob}} [v_1, v_2, Av_2] \longrightarrow [v_1, v_2, \tilde{v}_3] \longrightarrow \dots$$

OG

krok $k=1$: $v_1 := v/\|v\| \dots \operatorname{span}\{v\} = \operatorname{span}\{v_1\}$

krok $k=2$: $\tilde{v}_2 := Av_1 - (v_1^* A v_1) v_1$ (OG krok)

$v_2 := \tilde{v}_2 / \|\tilde{v}_2\| \dots \operatorname{span}\{v_1, Av_1\} = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ (ON)

krok $k=3$: $\tilde{v}_3 = Av_2 - (v_1^* A v_2) v_1 - (v_2^* A v_2) v_2$ (OG krok)

$v_3 := \tilde{v}_3 / \|\tilde{v}_3\|$

Proč můžu vzít Av_2 místo $A^2 v_1$?

$$\operatorname{span}\{v_1, Av_1, A^2 v_1\} = \operatorname{span}\{v_1, Av_1, Av_2\} = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}, \quad A^2 v_1 = A(Av_1)$$

D: $Av_1 \in \operatorname{span}\{v_1, v_2\} \Rightarrow A(Av_1) \in \operatorname{span}\{Av_1, Av_2\}$

obecně: (*)

$$\tilde{v}_{k+1} := Av_k - \sum_{i=1}^{k} (v_i^* A v_k) v_i$$

$$v_{k+1} := \tilde{v}_{k+1} / \|\tilde{v}_{k+1}\|, \quad k = 1, 2, \dots, m-1$$

Lemma: Vektory $v_1, \dots, v_m$ generované předpisem (*) jsou ortonormální a $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_m\} = \mathcal{K}_m(A, v)$.

D: plyne z konstrukce □

algoritmus (MGS varianta): vstup: A, v, m
výstup: $v_1, \dots, v_m$ .. ON báze $\mathcal{K}_m(A, v)$

$v_1 = v / \|v\|$
for $k = 1, 2, \dots, m-1$ do
  $w := A v_k$
  for $i = 1, \dots, k$ do
    $h_{ik} := v_i^* w$
    $w := w - h_{ik} v_k$
  end
  $h_{k+1,k} := \|w\|$
  if ($h_{k+1,k} = 0$) then STOP
  else $v_{k+1} := w / h_{k+1,k}$
end

nastane pouze, pokud dosáhneme $k = d(A, v)$

! DLOUHÉ REKURENCE ≡ nový vektor se OG proti všem předchozím

vlastnosti: výp. náklady – 1x násobení s A v každé iteraci, dlouhé rek.
- paměť – ukládáme $v_1, \dots, v_m$
- OG se zachovává dobře
- cena iterace s k rychle roste

ozn.: $V_k := [v_1, \dots, v_k] \in \mathbb{C}^{n \times k}$ (ON sloupce),

OG koeficienty $\in \mathbb{C}$

$$H_k := \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & \cdots & h_{1k} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & h_{k,k-1} & h_{kk} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k \times k} \quad \dots \text{horní Hessenbergova matice}$$

$\in \mathbb{R}$, normy > 0

$$H_{k+1,k} := \begin{bmatrix} H_k \\ \hline 0 \cdots 0 \; h_{k+1,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(k+1,k)}, \quad k = 1, \dots, m-1$$

Lemma: Nechť $m \leq d(A,v)$. Pak pro matice $V_k, H_k, H_{k+1,k}$, $k = 1,\dots,m-1$ generované Arnoldiho procesem platí:

1, $AV_k = V_{k+1} H_{k+1,k}$

2, $AV_k = V_k H_k + \underbrace{h_{k+1,k}}_{\in \mathbb{R}} v_{k+1} e_k^T$ matice hodnosti 1 $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & v_{k+1} \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \end{bmatrix}$

3, $V_k^* A V_k = H_k$

D: $(*) \Rightarrow h_{k+1,k} v_{k+1} = A v_k - \sum_{i=1}^{k} h_{ik} v_i$, $i = 1,\dots,m-1$

$\Rightarrow A v_k = \sum_{i=1}^{k} h_{ik} v_i + h_{k+1,k} v_{k+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow A.[v_1,\dots,v_k] = [v_1,\dots,v_{k+1}] \cdot H_{k+1,k} \Rightarrow 1,$

1, $\Rightarrow$ 2, triv.

$AV_k = V_k H_k + h_{k+1,k} v_{k+1} e_k^T \; / \; V_k^* \cdot$

$V_k^* A V_k = H_k + h_{k+1,k} \underbrace{V_k^* v_{k+1} e_k^T}_{= 0 \;\; v_{k+1} \perp v_i,\, i=1,\dots,k}$ □

Pozn: řekneme, že H_k je zúžení operátoru A na prostor $\mathcal{K}_k(A,v)$

$A: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$

$H_k: \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^n$

- **Lanczosova tridiagonalizace**: $P_p: A = A^*$

$\equiv$ zjednodušený Arnoldiho proces pro matice A - ~~HPD~~ hermitovská, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$H_k = V_k^* A V_k = V_k^* A^* V_k = H_k^* \Rightarrow H_k$ - hermit.

navíc: $\left.\begin{matrix} h_{i+1,i} \in \mathbb{R} \text{ (NORMY)} \\ h_{i,i} \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow H_k = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & & 0 \\ h_{21} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & h_{k,k-1} \\ 0 & & h_{k,k-1} & h_{kk} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, SYMETRICKÁ důsledek: ON báze $\mathcal{K}_k(A, r)$ pro A-~~HPD~~ hermitovské lze počítat 3-člennou rekurencí (tj. ortogonalizuje jen proti 2-ma předchozím vektorům), navíc 1 koeficient znám z předchozího kroku (norma)

algoritmus : vstup: A, v, m
(MGS varianta) výstup:

$v_1 = v/\|v\|$

$\beta_1 := 0$, $v_0 := 0$

for $k = 1, 2, \dots, m-1$ do

$w := Av_k - \beta_k v_{k-1}$

$\alpha_k := v_k^* w$

$w := w - \alpha_k v_k$

$\beta_{k+1} := \|w\|$

$v_{k+1} := w/\beta_{k+1}$

end

! KRÁTKÉ REKURENCE

ozn : $V_k = \underbrace{[v_1, \dots, v_k]}_{\text{ON báze}}$, $T_k = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & 0 \\ \beta_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_k \\ 0 & & \beta_k & \alpha_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k}$,

$T_{k+1,k} = \begin{bmatrix} T_k \\ 0 \dots 0 \; \beta_{k+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1)\times k}$, $k = 1, \dots, m-1$

platí : $AV_k = V_{k+1} T_{k+1,k} = V_k T_k + \beta_{k+1} v_{k+1} e_k^T$

$V_k^* A V_k = T_k$, $k = 1, \dots, m-1$

D: plyne z Lemmatu pro Arnoldiho

vlastnosti : krátké rek. jsou výpočetně levnější (konstantní cena iterace), ale OG se rychle ztrácí

4.3 Aproximace vl. č. na $\mathcal{K}_n(A,v)$

máme: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, regul

vol.: $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$

víme: $\mathcal{K}_d(A,v)$ je A-invariantní $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ spočteme ON bázi $\mathcal{K}_d(A,v)$ Arn. proc.

$\rightarrow$ pak platí $\boxed{A V_d = V_d H_d}$

báze inv. podprostoru A

Lemma: Označme $(\mu_i^{(d)}, y_i^{(d)})$, $i = 1, \dots, \tilde{d}$ vlastní páry H_d. Pak $(\mu_i^{(d)}, V_d y_i^{(d)})$ je vlastní pár A, $i = 1, \dots, \tilde{d}$.

D: $\tilde{d} = \#$ vl. párů H_d, $\tilde{d} \leq d$; $i \in \{1, \dots, \tilde{d}\}$:

$$\underbrace{A V_d y_i^{(d)}}_{=: x_i^{(d)}} = V_d \left(H_d y_i^{(d)}\right) = V_d \left(\mu_i^{(d)} y_i^{(d)}\right) =$$

$$= \mu_i^{(d)} \cdot \underbrace{V_d y_i^{(d)}}_{=: x_i^{(d)}} \Rightarrow A x_i^{(d)} = \mu_i^{(d)} x_i^{(d)} \qquad \square$$

důsl.: je-li $\mathcal{K}_d(A,v)$ A-invariantní, pak máme nejvýše d vl. párů A

ALE! obvykle chceme aproximaci v menším počtu iterací Arn. procesu (d může být velké, navíc v FPA stejně nespočteme H_d přesně) aproximace vl. č. v iteraci k:

$$AV_k = V_k H_k + h_{k+1,k} v_{k+1} e_k^T \qquad \boxed{k \le d}$$

ozn: $(\mu_i^{(k)}, y_i^{(k)})$, $i = 1, \dots, \tilde{k}$ vl. páry H_k

$$\Rightarrow A(\underbrace{V_k y_i^{(k)}}_{=: x_i^{(k)}}) = \mu_i^{(k)} (\underbrace{V_k y_i^{(k)}}_{=: x_i^{(k)}}) + \underbrace{h_{k+1,k} (e_k^T y_i^{(k)}) v_{k+1}}_{=: r_i^{(k)}}$$

$$\| \quad A x_i^{(k)} = \mu_i^{(k)} x_i^{(k)} + r_i^{(k)},$$ kde $r_i^{(k)}$ je chyba aproximace

def: Nechť $(\mu_i^{(k)}, y_i^{(k)})$ je vlastní pár H_k, $1 \le k \le d$. Dvojici $(\mu_i^{(k)}, V_k y_i^{(k)}) \equiv (\mu_i^{(k)}, x_i^{(k)})$ nazveme Ritzův pár matice A.
Vektor $r_i^{(k)} \equiv A x_i^{(k)} - \mu_i^{(k)} x_i^{(k)} = h_{k+1,k} (e_k^T y_i^{(k)}) v_{k+1}$ nazveme chyba Ritzova páru.

Jak dobře aproximují R. páry vl. páry A?

lemma: Chyba Ritzova páru splňuje

$$r_i^{(k)} \perp \mathcal{K}_k(A, v)$$

$$\|r_i^{(k)}\| = h_{k+1,k} |e_k^T y_i^{(k)}|$$

D: $r_i^{(k)} = \underbrace{h_{k+1,k} (e_k^T y_i^{(k)})}_{\in \mathbb{C} \dots \text{číslo}} \cdot \underbrace{v_{k+1}}_{\in \mathbb{C}^{k+1} \dots \text{vektor}}$ ← $\|v_{k+1}\| = 1$ $\Rightarrow$ triv. □

pozn: - malá $\|r_i^{(k)}\| \not\Rightarrow$ dobrou aproximaci
- dobře se aproximuje okraj $\mathrm{sp}(A)$

postup výpočtu (schema):

vstup: A, $v \neq 0$, m

výstup: Ritz. páry A

for $k = 1, \dots, m-1$ do

  proveď 1 přídavný krok Arn. procesu k V_{k-1}, H_{k-1}

  spočti vl. páry $(\mu_i^{(k)}, y_i^{(k)})$ H_k, $i = 1, \dots, k$

  spočti Ritz. vektory $x_i^{(k)} := V_k y_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, k$

end

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{K}_1(A,v) & & \mathcal{K}_2(A,v) & \dots & \mathcal{K}_m(A,v) \\ \downarrow H_1 & & \downarrow H_2 & & \downarrow H_m \\ \text{1 Ritz. pár} & & \text{max. 2 páry} & & \text{max. } m \text{ párů} \end{array}$$

≡ ARNOLDIHO METODA APROXIMACE VL. PÁRŮ

pozn: vl. páry H_k lze počítat efektivně, neboť $k \ll n$ a $H_k =$ má lepší strukturu (iteračně QR algoritmem)

spec. případ A - hermitovská: $P_p: A = A^*$

→ Arn. proc. nahradíme Lanc. trid.

≡ LANCZOSOVA MET. APR. VL. PÁRŮ

⇒ nižší výpočetní náklady

– lze získat lepší odhady chyby

$$\| \; A V_k = V_k T_k + \beta_{k+1} v_{k+1} e_k^T$$

$(\mu_i^{(k)}, y_i^{(k)}) \dots$ vl. páry T_k

Lemma: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $A = A^*$. Pak Ritz. pár $(\mu_i^{(k)}, x_i^{(k)})$ spočtený Lanc. metodou splňuje, že $\min_{\lambda \in sp(A)} |\lambda - \mu_i^{(k)}| \leq \beta_{k+1} \cdot |e_k^T y_i^{(k)}|$.

D: $A = A^* \Rightarrow \exists$ spekt. rozklad: $A = UDU^*$,
$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$, U - unitární

$$r_i^{(k)} = A x_i^{(k)} - \mu_i^{(k)} x_i^{(k)} = UDU^* x_i^{(k)} - \mu_i^{(k)} U U^* x_i^{(k)} =$$
$$= U (D - \mu_i^{(k)} I) U^* x_i^{(k)} \Rightarrow$$

nemění normu

$$\| r_i^{(k)} \| = \| \cancel{U} (D - \mu_i^{(k)} I) \cdot (U^* x_i^{(k)}) \| \geq$$
$$\geq \min_{j=1,\dots,n} |\lambda_j - \mu_i^{(k)}| \cdot \| x_i^{(k)} \|$$

matice ON sloupců nemění normu

navíc $\| x_i^{(k)} \| = \| V_k y_i^{(k)} \| = \| y_i^{(k)} \| = 1$

$$\Rightarrow \min_{j=1,\dots,n} |\lambda_j - \mu_i^{(k)}| \leq \| r_i^{(k)} \| \overset{\text{lemma (a)}}{=} \beta_{k+1} |e_k^T y_i^{(k)}|$$

$\square$

důsledek: je-li $\beta_{k+1} \cdot |e_k^T y_i^{(k)}|$ malé, pak $\exists$ v.č. A, které je dobře aproximováno Ritz. číslem $\mu_i^{(k)}$