Téma 1: Řešení soustav lin. alg. rovnic

1

úloha: $\| \; Ax=b, \; A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ - regulární, $b\in\mathbb{C}^{n}$

lineární model: $x \xrightarrow{A} b$

neznámý vstup — model závislosti — měřený výstup (pozorování)

metody řešení:
- přímé (GE, QR rozklad, ...)
- iterační (bude)
- kombinace

1.1 Přímé metody

prostá GE (bez pivotace): LA1

schema: 1, přímý chod: $\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \times & \times & \cdots & \times & \times \\ 0 & \times & \cdots & \times & \times \\ 0 & \times & \cdots & \times & \times \\ 0 & \times & \cdots & \times & \times \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{array}\right]$

ROZŠÍŘENÁ MATICE DAT

$U =$, $\tilde{b} =$

2, zpětný chod: $\left[\begin{array}{c|c} U & \tilde{b} \end{array}\right] \uparrow$ zpětná substituce

maticový zápis: $\| \; A = L.U =$, kde L je matice kumulovaných elementárních transformací

1, přímý chod:
$$LUx=b \xrightarrow[\text{citně}]{\text{impli-}} Ux = L^{-1}b \equiv \tilde{b}$$

2, zpětný chod:
řešení $Ux=\tilde{b}$

GE s pivotací (částečnou - řádkovou):

- lze provést pro každou A regulární

maticově: $PA = LU$, P - permutační matice vlastnosti:

- paměťové nároky – L není třeba konstruovat a uchovávat, za běhu přepisujeme A, b novými hodnotami
- výp. nároky – $\boxed{\frac{2}{3}n^3}$
- obecně nemusí být stabilní – GE s pivotací je podmíněně zpětně stabilní (růstový faktor $\frac{\|U\|}{\|A\|}$ lze monitorovat při výpočtu)

tvrz.: A – HPD, pak GE lze upravit tak, aby byla zpětně stabilní (Choleského rozklad $A = L \cdot L^*$, $L = \Delta$)

Téma 1.2: Iterační met. pro řešení soustav

úloha: $Ax = b$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{C}^n$, A – regul.

praxe: A – často velká ($n \sim 10^6$ i více)
často řídká
může být daná jen implicitně
(fce realizující $A * z$, $z \in \mathbb{C}^n$)

řídkost: # nenulových prvků v A ozn. ℓ
$\ell \ll n^2 \Rightarrow (A * z) \ldots \mathcal{O}(\ell) \ll \mathcal{O}(n^2)$

! při GE dochází k rychlému zaplnění a rostou výpočetní náklady $\Rightarrow$ chci sestrojit posl. aproximací řešení

$$x_0, x_1, x_2, \ldots \xrightarrow{\text{konvergence}} x$$

jen pomocí násobení $A * z$

př: $n = 3$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 = b_1 \Rightarrow \xi_1 = \frac{1}{a_{11}} \cdot (-a_{12}\xi_2 - a_{13}\xi_3 + b_1)$$
$$a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 = b_2 \Rightarrow \xi_2 = \frac{1}{a_{22}} \cdot (-a_{21}\xi_1 - a_{23}\xi_3 + b_2)$$
$$a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 = b_3 \Rightarrow \xi_3 = \frac{1}{a_{33}} \cdot (-a_{31}\xi_1 - a_{32}\xi_2 + b_3)$$

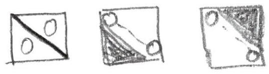
vol. $x_0 = \begin{pmatrix} \xi_1^{(0)} \\ \xi_2^{(0)} \\ \xi_3^{(0)} \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ dosaď do pravé strany $\rightarrow$

počáteční aproximace

$$\rightarrow x_1 := \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_2^{(1)} \\ \xi_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{bmatrix} x_0 + b \right)$$

nová aproximace

• **Jacobiho metoda**: $A = D - L - U$ .. štěpení matice



předpoklad: D - regulární

vol. počáteční aproximaci x_0^J (typicky $x_0^J = 0$)

→ pak sekvence aproximací ~~ř~~řešení $Ax = b$ Jac. metodou je tvaru

$$x_k^J := D^{-1}(L+U)\,x_{k-1}^J + D^{-1}b, \quad k = 1, 2, \dots$$

algoritmus: vstup: A, b, x_0, m # iterací
výstup: x_m^J

```
for k = 1, ..., m do
    for i = 1, ..., n do
        ξ_i^(k) := 1/a_ii ( - Σ_{j=1, j≠i}^{n} a_ij ξ_j^(k-1) + b_i )
    end
end
```

možno paralelizovat výpočet

vlastnosti: • paměťové nároky - uložení x_k^J, x_{k-1}^J
• výpočetní -||- - dominantní operace je $1\times (A * z)$ v $\forall$ iteraci

platí: $x_k^J = x_{k-1}^J + D^{-1}(b - A x_{k-1}^J)$, kde $r_{k-1}^J := b - A x_{k-1}^J$ je residuum v iteraci $(k-1)$, pokud D je regulární.

$$D:\ x_k^J = D^{-1}\overbrace{(L+U)}^{=D-A}x_{k-1}^J + D^{-1}b = x_{k-1}^J - D^{-1}A x_{k-1}^J + D^{-1}b \quad \square$$

zastavovací kritérium:

if $\|r_k^J\| < TOL$ then STOP

zvolená tolerance

- **Gauss-Seidlova met.:**

→ použij ihned spočtené hodnoty $\xi_j^{(k)}$

⇒ (△) nahradíme předpisem

$$\xi_i^{(k)} := \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\xi_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\xi_j^{(k-1)} + b_i\right)$$

⇒ $$\boxed{x_k^{GS} := D^{-1}Lx_k^{GS} + D^{-1}Ux_{k-1}^{GS} + D^{-1}b, \quad k=1,2,\dots}$$

platí: $x_k^{GS} = x_{k-1}^{GS} + (D-L)^{-1}(b - Ax_{k-1}^{GS})$,
pokud $(D-L)$ je regulární,
kde $r_{k-1} := b - Ax_{k-1}$ je residuum

D: $Dx_k^{GS} - Lx_k = \overset{D-L-A}{U}x_{k-1}^{GS} + b$

$(D-L)x_k^{GS} = (D-L)x_{k-1}^{GS} + (b - Ax_{k-1}^{GS}) \;/\cdot (D-L)^{-1}$ □

vlastnosti:
- paměť – uložení jen 1 aproximace (přepisuji x_{k-1} na x_k)
- většinou rychlejší konvergence než Jac. met.
- sekvenční – nelze paralelizovat

- **další metody:** SOR, SSOR, ...

$$x_k^{SOR} := \omega \cdot \underbrace{\left[D^{-1}(Lx_k^{GS} + Ux_{k-1}^{GS} + b)\right]}_{\text{nová iterace GS}} + (1-\omega)\underbrace{x_{k-1}^{GS}}_{\text{předchozí iterace}}$$

$0<\omega<2$ .. relaxační parametr
$\omega := 1 \Rightarrow$ SOR ≡ GS

• **obecný přístup:** $A = M - N$, M − regul.

… obecné štěpení

$Ax = b$

$Mx = Nx + b$

$x = M^{-1}\overbrace{N}^{=M-A}x + M^{-1}b = x + M^{-1}\overbrace{(b - Ax)}^{\text{residuum}} \Rightarrow$

$$\| \; x_k := \underbrace{(M^{-1}N)}_{\text{iterační matice − nezávisí na } k} x_{k-1} + M^{-1}b = x_{k-1} + M^{-1}\overbrace{(b - Ax_{k-1})}^{r_{k-1}}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

… stacionární (klasická) iterační metoda

př: Jac.: $M = D$, $N = L + U$ G-S: $M = D - L$, $N = U$

Konvergence stac. metod

ozn: $\| \; e_k := x - x_k$ … chyba aproximace v it. k

Věta: Nechť x_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ je posloupnost aproximací daná stacionární metodou. Pak pro chybu aproximace platí:

1) $e_k = (I - M^{-1}A)e_{k-1} = (I - M^{-1}A)^k e_0$

2) $\dfrac{\|e_k\|}{\|e_0\|} \leq \|(I - M^{-1}A)^k\| \leq \|I - M^{-1}A\|^k$

relativní normovaná chyba aproximace

D(1): $x_k = x_{k-1} + M^{-1}(Ax - Ax_{k-1}) = x_{k-1} + M^{-1}A(x - x_{k-1})$

$\Rightarrow \overbrace{x - x_k}^{= e_k} = (x - x_{k-1}) - M^{-1}A(x - x_{k-1}) =$

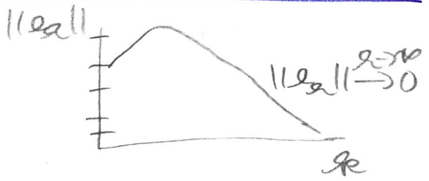
$= (I - M^{-1}A)\overbrace{(x - x_{k-1})}^{= e_{k-1}} = \ldots$

(1) ⇒ (2) triv. □

pozn: $(I - M^{-1}A) = M^{-1}N \Rightarrow \| \; e_k = \overbrace{(M^{-1}N)}^{\text{iterační matice}} e_{k-1} = (M^{-1}N)^k e_0$

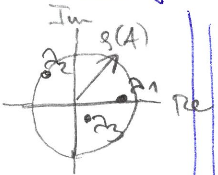
důsledek: Nechť $\|M^{-1}N\| < 1$. Pak stac. metoda konverguje $\forall x_0 \in \mathbb{C}^n$, tj. $\|x - x_k\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

- $\|M^{-1}N\| < 1$ je postačující (nikoliv nutná) podmínka konvergence
- přechodový jev – na počátku může $\|e_k\|$ růst – dokázali jsme konv. jen v limitě



- souvislost: Banachova věta o pevném bodě:

$$e_k = (M^{-1}N)\, e_k$$ kontrahující zobrazení, je-li $\|M^{-1}N\| < 1$



def: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = sp(A)$. Pak číslo $\rho(A) := \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|$ nazveme spektrální poloměr matice A.

Lemma: $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}: \rho(A) \le \|A\|$

D: $\lambda \in sp(A) \Rightarrow \exists v \in \mathbb{C}^n : Av = \lambda v$, $\|v\| = 1$ ... vl. vektor

$$\Rightarrow \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \underbrace{\|v\|}_{=1} = \|Av\| \le \|A\| \cdot \underbrace{\|v\|}_{=1} \Rightarrow |\lambda| \le \|A\| \qquad \square$$

Pozn: platí pro libovolnou maticovou normu generovanou vektorovou normou

Věta (Oldenburgova): Nechť $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pak

$$B^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff \rho(B) < 1.$$

D: $B = CJC^{-1}$, $J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_e \end{bmatrix} \Rightarrow B^k = C \cdot \begin{bmatrix} J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_e^k \end{bmatrix} \cdot C^{-1}$ (8)

$\Rightarrow$ stačí dokázat pro Jord. blok, že

$$J_\lambda^k \equiv \left.\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}\right\}_{m}^{k} \xrightarrow{k \to \infty} 0 \iff |\lambda| < 1$$

$$J_\lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \lambda^k \end{bmatrix} \quad \text{pro } k > m$$

... tvrz. platí ■

$\Rightarrow B^k \to 0 \iff |\lambda| < 1 \ \forall \lambda \in sp(A) \iff \rho(B) < 1$ □

důsledek: Stacionární metoda konverguje $\forall x_0 \in \mathbb{C}^n \iff \rho(M^{-1}N) < 1$.

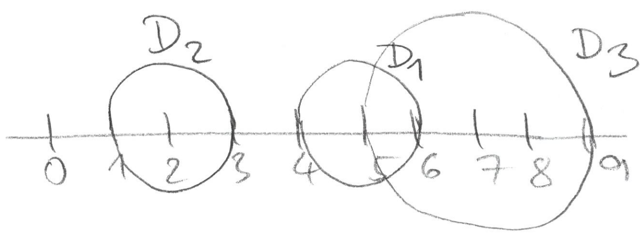
D: $e_k = (M^{-1}N)^k e_0$ $\quad \|e_k\| \to 0 \iff \rho(M^{-1}N) < 1$ □

- $\rho(M^{-1}N) < 1$ je nutná a postačující podmínka konvergence, ale nelze obecně snadno ověřit

konvergence pro spec. matice:

Věta (Geršgorinova): $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Označme $D_i := \{z \in \mathbb{C} : \|z - a_{ii}\| \le \sum_{j=1, j \ne i}^{n} |a_{ij}|\}$, $i = 1, \dots, n$ i-tý Gerš. kruh matice A. Pak $sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

Př: $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$



$\Rightarrow$ vidíme, že A - regul.

$\Rightarrow$ odhad polohy vl. čísel, odhad $\rho(A)$, ...

D: $\lambda \in sp(A)$ lib. $\Rightarrow \exists v \in \mathbb{C}^n: Av = \lambda v, \|v\| \neq 0$

nechť je v normován tak, že $v_i = 1$, $|v_j| \leq 1, j \neq i$

i-tá složka vektoru

↑ ostatní složky

$Av = \lambda v \,/ \cdot e_i^T$.

$$[a_{i1}, \dots, a_{in}] \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \lambda \overset{=1}{v_i}$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ \neq i}}^{n} a_{ij} v_j + a_{ii} = \lambda \Rightarrow |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ \neq i}}^{n} |a_{ij}| \cdot \overset{\leq 1}{|v_j|}$$

$\Rightarrow \lambda \in D_i$

□

def: Matici $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nazveme ostře diagonálně dominantní (ODD), pokud $\sum_{\substack{j=1\\ \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, i = 1, \dots, n$.

→ ODD matice vznikají v řadě aplikací

→ dle Gerš. věty jsou regulární ($0 \notin D_i$)

Věta: Je-li $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ODD, pak x_k^J a x_k^{GS} konvergují k x a to $\forall x_0 \in \mathbb{C}^n$.

D(Jac.): chci ukázat, že $\rho(\underbrace{D^{-1}(L+U)}_{\text{iterační mce}}) < 1$

$$\|D^{-1}(L+U)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1\\ \neq i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \underset{\text{ODD}}{\Uparrow} < 1$$

maximová norma = max. součet v řádku A

navíc $\rho(D^{-1}(L+U)) \leq \|D^{-1}(L+U)\|_\infty$

$\Rightarrow \rho(D^{-1}(L+U)) < 1$

D(G-S): analog., ale více psaní

□

pozn.: lze dok., že je-li A-HPD, pak GS metoda konverguje $\forall x_0 \in \mathbb{C}^n$ (neplatí překvapivě pro Jac. met.)

1.3 Iterační zpřesnění (čtení navíc)

→ slouží k zpřesnění dané aproximace $\tilde{x}$ řešení soustavy $Ax=b$

→ $\tilde{x}$ - dáno z měření, spočteno GE, stacionární metodou, ...

idea: $r := b - A\tilde{x}$ ... rezidum
$e := x - \tilde{x}$ ... chyba ~~řešení~~ aproximace

platí: $\boxed{Ae = -r}$ ... residuová rovnice

D: $Ae = Ax - A\tilde{x} \pm b = \underbrace{(Ax-b)}_{=0} - \underbrace{(A\tilde{x}-b)}_{=-r}$ □

algoritmus: vstup: $A, b, \tilde{x}$
výstup: $\hat{x}$ - nová aproximace

$r := b - A\tilde{x}$
řeš residuovou rovnici $Ae = -r$
$\hat{x} := \tilde{x} + e$

GE, stacionární metodou, ...

pozn.: počítáme-li $\tilde{x}$ i $\hat{x}$ pomocí GE, stačí provádět GE jednou (výpočet $LU=A$) - úspora výp. času